

II -1- Analyse limite locale :

II -1-1- Critère de Tresca :

Ce critère fut introduit par H Tresca (1864, 1867, 1868) à la suite d'expériences sur le plomb.

La fonction de charge correspondante s'écrit :

$$f(\sigma, E) = \sup\{|\sigma_i - \sigma_j|, i, j = 1, 2, 3\} \quad \text{II.1}$$

($\sigma_i, i = 1, 2, 3$: contraintes principales).

σ_0 apparaît comme la limite d'élasticité en traction simple ; elle est égale à

l'opposé de la limite en compression simple ; la résistance en cession simple vaut $\sigma_0/2$.

Ce critère est aussi appelé critère de « cession maximale », terminologie dont l'origine est évidente si l'on se reporte par exemple à la représentation des contraintes dans le diagramme de Mohr; sur toute facette l'intensité de la contrainte de cisaillement est bornée par :

$$|\tau| \leq \sigma_0/2 \quad \text{II.2}$$

Dans l'espace R^3 des contraintes principale, le domaine d'élasticité du matériau est un prisme hexagonal régulier d'axe (1,1,1).

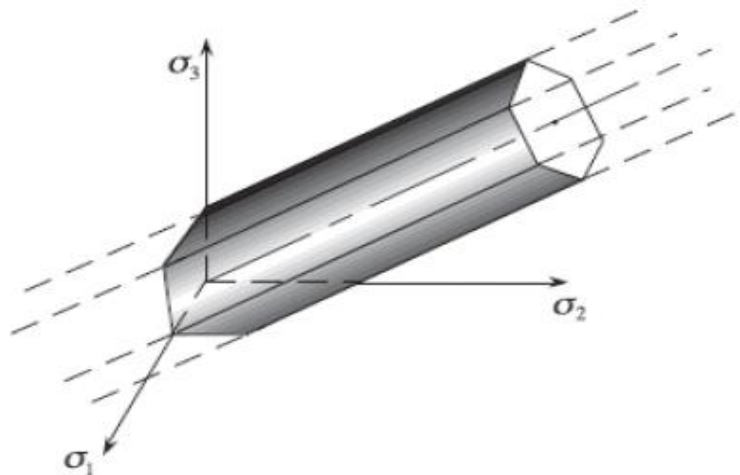


Figure II .1: critère de tresca : domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principale

L'expression (II.1) où σ_0 est une constante correspond au cas du matériau parfaitement plastique. Pour le matériau écrouis sable, on peut notamment examiner le cas du modèle d'écrouissage isotrope (II.3) pour lequel la fonction de charge s'explicite alors sous la forme :

$$f(\sigma, E) = \sup (\sigma - \alpha)_t - (\sigma - \alpha)_f - \sigma_0 \mid i, f = 1, 2, 3 \quad \text{II.3}$$

L'écrouissage cinématique (II.3) s'exprime ici par :

$$f(\sigma, E) = f(\sigma - \alpha) \quad \text{II.4}$$

$$f(\sigma, E) = \sup (\sigma - \alpha)_t - (\sigma - \alpha)_f - \sigma_0 \mid i, f = 1, 2, 3 \quad \text{II.5}$$

Dans laquelle le tenseur symétrique α est de trace nulle. Cet écrouissage ne conserve pas l'isotropie initiale du matériau. On peut enfin adopter un modèle mixte « isotrope cinématique »

Dépendant des paramètres d'écrouissage scalaire α et tensoriel symétrique de trace nulle.

$$f(\sigma, E) = \sup \left\{ \frac{(\sigma - \alpha)_t - (\sigma - \alpha)_f}{\alpha} - \sigma_0 \mid i, j = 1, 2, 3 \right\} \quad \text{II.6}$$

II -1-2- Critère de Von mises :

Comme le critère de Tresca, il s'agit d'un critère valable pour les matériaux isotropes. Il est également indépendant de la composante sphérique du tenseur des contraintes. La Fonction de charge ne dépend donc que de façon générale pour un matériau isotrope, f qui est fonction des invariants de σ s'exprime de manière équivalente comme une fonction de $I_1 = \text{tr}$, premier invariant de σ , et des invariants non nuls de s définis par :

$$\begin{cases} J_2 = \frac{1}{2} \text{tr} s^2 = \frac{1}{2} s_{tf} s_{tf} \\ J_3 = \frac{1}{3} \text{tr} s^3 = \frac{1}{3} s_{tf} s_{fk} s_{ki} \end{cases} \quad \text{II.7}$$

Si f est indépendante de la partie sphérique de σ et ne dépend donc que de s , elle s'exprime en fonction des seuls invariants J_2 et J_3 . Le critère de Von Mises correspond pour un critère de ce type à la forme la plus simple.

La fonction de charge s'écrit :

$$f(\sigma) = \sqrt{J_2} - k$$

II.8

K apparaît comme la limite d'élasticité en cession simple. La limite en traction simple est Alors égale à $K\sqrt{3}$ la limite en compression simple est $-K\sqrt{3}$

On définit à partir de cette fonction de charge le concept de contrainte équivalente (de Von Mises) à un état de contrainte donné : notée σ_{eq} , c'est la contrainte de traction qui c'est la contrainte de traction qui donne la même valeur à la fonction de charge que l'état De contraintes considérées : $\sigma = \sqrt{3J_2}$

Le critère de Von Mises est parfois appelé « critère de la cession octaédrale ». Il a été proposé indépendamment par Beltrami (1903), Huber (1904), Von Mises (1913) et Hencky (1924) .

On en donne aussi une interprétation énergétique : limitation de L'énergie de distorsion élastique du matériau isotrope.

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$ des contraintes principales $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, le domaine d'élasticité du Matériau est un cylindre circulaire droit, d'axe (1, 1, 1)

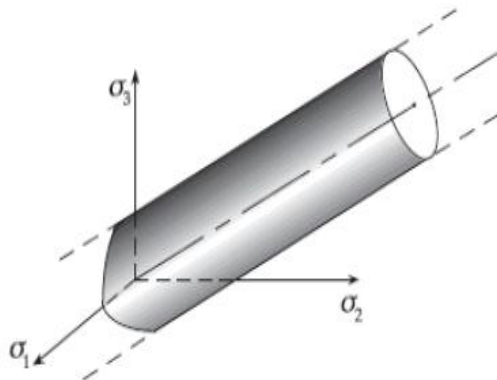


Figure II .2 : critère de Von mises : domaine d'élasticité dans l'espace des contraintes principale

Pour un matériau parfaitement plastique k est une constante. L'écrouissage isotrope correspond à l'expression :

$$f(\sigma, E) = \frac{\sqrt{J_2}}{a} - k$$

II.9

et l'écroutissement cinématique à :

$$f(\sigma, E) = \frac{\sqrt{1}}{2} \text{tr} (s - \sigma)^2 - k \quad \text{II.10}$$

Où α un tenseur symétrique de trace nulle, L'isotropie initiale du matériau n'est évidemment pas conservée par (II.10).

Le modèle mixte « isotrope-cinématique », dépendant des paramètres α et k Comme (II. 5), s'exprime par :

$$f(\sigma, E) = \frac{\sqrt{\text{tr}/2 (s - \alpha)}}{2\alpha} \quad \text{II.11}$$

Il est utile, pour les applications pratiques, de donner l'expression de la fonction de charge (II.7) de Von Mises, en fonction des contraintes principales :

$$f(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2]} = K \quad \text{II.12}$$

qui permet, souvent, d'éviter des calculs fastidieux.

II -2-Analyse limite Globale :

II -2-1- Mécanisme de Rupture :

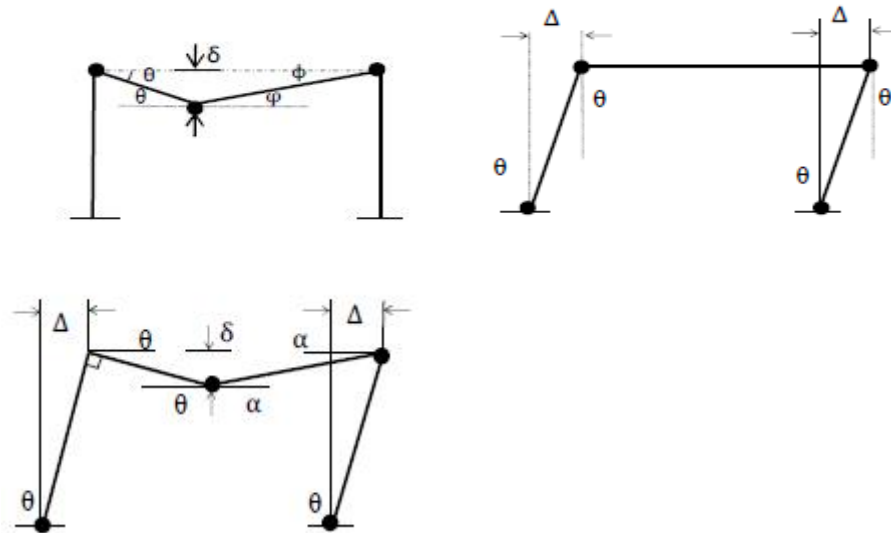
Un mécanisme est un ensemble de barre reliées par des rotules et formant un système déformable à un degré de liberté.

II -2-2- Notion de Mécanismes Indépendants :

Le nombre de mécanisme possibles croît rapidement lorsque le nombre de section potentiellement critiques augmente et il devient très difficile de relever tous ces mécanismes, sans risquer d'en omettre.

On peut distinguer donc quatre types de mécanismes :

- a) _ Mécanisme de poutre,
- b) _ Mécanisme de panneau,
- c) _ Mécanisme combiné



a) _ Mécanisme de poutre,

b) _ Mécanisme de panneau,

c) _ Mécanisme combiné

Figure II . 3 : les types des mécanismes.

II -2-3- Méthodes Utilisées Pour Le Calcul des Charges De Ruine Pour

Des Eléments Structuraux ou Structures Simples :

II-2-3-a-Introduction :

Il a été annoncé précédemment que la ruine d'une structure se produit par la formation d'un nombre suffisant de rotules plastiques aux endroits des sections critiques (plastifiées), De-ci engendre une diminution de la rigidité accompagnée à chaque fois d'une redistribution des efforts internes, jusqu'à ce que la structure devienne hypostatique. A ce stade le mécanisme de ruine est atteint et la charge devient la charge de ruine. Cette charge est évidemment différente de la charge à l'E.L.U et la différence représente la vraie marge de sécurité pour la structure.

Les outils théoriques nécessaires pour cette détermination sont le théorème du moment libre et des moments de réaction et la méthode basée sur les travaux virtuels.

II-2-3-b- Calcul de la Charge de Ruine par la Méthode

Du Moment Libre :

Il est possible de déterminer le mécanisme de ruine des éléments structuraux ou structures simples et de tracer leurs diagramme des moments fléchissant à la ruine par la méthode du moment libre et de réaction et ce sans passer par aucune analyse.

Une fois le diagramme des moments est déterminé, on peut vérifier la satisfaction des trois conditions du vrai mécanisme de ruine et calculer facilement la charge de ruine.

Cette méthode est basé sur le principe de :

$$M_{p1} + M_{p2} = M_{p3} \quad (2-3)$$

Moment fléchissant réel au point d'application de la charge	Moment fléchissant de réaction au point d'application de la charge	Moment fléchissant libre au point d'application de la charge (Moment de la poutre simplement appuyée)
---	--	--

La charge de ruine peut être déterminée facilement de cette relation vue que le moment fléchissant libre au point d'application de la charge, M_{p3} , est en fonction de cette dernière

II-2-3-c- Calcul De La Charge De Ruine Par La Méthode Des Travaux

Virtuels :

La charge de ruine peut être déterminée par une deuxième méthode, cette dernière basée sur le principe des déplacements virtuels, Le travail produit par l'effort extérieur, F , doit être égal au travail produit par l'effort intérieur, c'est-à-dire au travail du moment M_p . La charge de ruine produit un déplacement virtuel δ et un travail extérieur défini par le produit $F \cdot \delta$, le moment plastique M_p produit une rotation virtuelle θ , Le travail virtuel intérieur est $M_p \cdot \theta$, la charge de ruine des éléments structuraux ou structures simples peut s'obtenir à partir de l'égalité suivante :

$$\sum P_i \cdot \delta_i = \sum M_p \cdot \theta \quad (2-4)$$

II -2 -4- Rotule Plastique :

Lorsque le moment dans une section d'une poutre atteint le moment plastique M_p ,
La courbure tend localement vers l'infini, la section se comporte comme une rotule et permet une rotation relative des deux segments poutres adjacents.

Il ne s'agit pas de vraie rotule au sens habituel du terme (c'est_à_dire rotule mécanique sans frottement) puisqu'elle continue à transmettre le moment plastique M_p .
il s'agit d'une rotule plastique.

Le fait d'ajouter une rotule à une structure diminue son degré d'hyper staticité d'une unité.

- Formation La Rotule Plastique :**

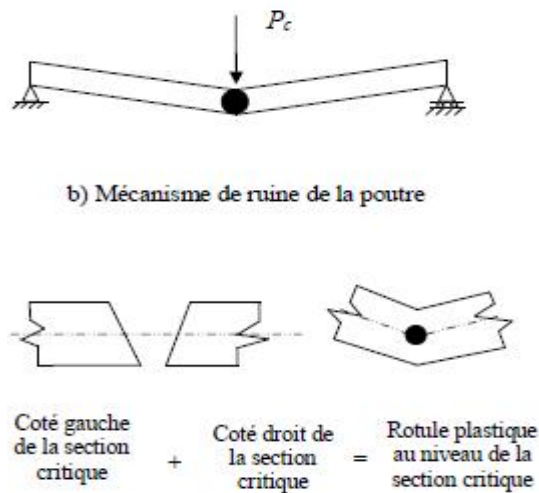


Figure II .4 : Formation La Rotule Plastique

- Formation D'un Mécanisme :** théoriquement, il existe une infinité de façon de placer des rotules pour transformer une structure stable en un mécanisme, cependant pour une combinaison de charge donnée,

La ruine d'une structure se fera par la formation d'un mécanisme unique est bien précis.

II -2-5 - Sections Potentiellement Critiques :

Pour le calcul de la charge limite d'une structure, le mécanisme réel est inconnu a priori et que l'on est obligé de faire un inventaire de mécanismes plausibles.

Pour cela, on doit chercher les positions de formation, possible de rotule plastique ou le rapport $\frac{M}{M_p}$ peut-être maximum, c'est à dire :

- a) les points d'application des charge concentré,
- b) les points de cisaillement nul pour les membrures soumises à des charges réparties,
- c) aux angles de cadres et à l'intersection de plusieurs membrures,
- d) l'intersection de deux membrures plastiques différents,
- e) les points appui,

II -2-6- Spécifications Pour Les Nœuds Poteaux-Poutres :**II -2-6-a- Dispositions Constructives :**

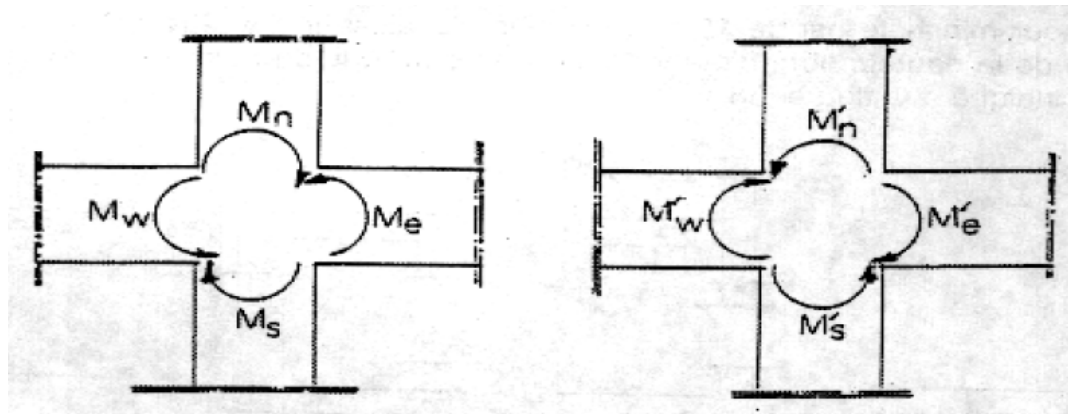
Les dispositions constructives données pour les poteaux et pour les poutres et telles que reprises en particulier doivent être respectées pour leurs parties communes que sont les nœuds, afin d'assurer un minimum de confinement préservant au maximum l'intégrité de ces derniers et permettre au reste de la structure de déployer ses capacités de dissipation d'énergie.

II- 2-6-b- Dimensionnement Du Nœud Vis-à-vis Des Moments Fléchissant :

Il convient de vérifier pour les portiques participant au système de contreventement et pour chacune des orientations possibles de l'action sismique que la somme des moments résistants ultimes des extrémités de poteaux ou montants aboutissant au nœud est au moins égale en valeur absolue à la somme des valeurs absolues des moments résistants ultimes des extrémités des poutres ou traverses affectés d'un coefficient majorateur de 1.25 (voir Figure II .5).

Cette disposition tend à faire en sorte que les rotules plastiques se forment dans les poutres plutôt que dans les poteaux.

Néanmoins, cette vérification est Facultative pour les maisons individuelles et les deux (2) derniers niveaux des bâtiments Supérieurs à R+2.



$$|M_n| + |M_s| \geq 1.25 (|M_w| + |M_e|)$$

$$|M'_n| + |M'_s| \geq 1.25 (|M'_w| + |M'_e|)$$

figure II .5 : dimensionnement d'un nœud poutre _ poteau